P. Ciarlet
Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation

p 83 - 88

Méthode | Gauss en $O(n^3)$
| LU en $O(n^2)$ (mais il faut faire la décomposition en $O(n^3)$).

149
157
158
162

Développement : décompositions LU et de Cholesky

Théorème : Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée d'ordre n telle que
$\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\Delta_k = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix} \in GL_n(\mathbb{K})$

Alors il existe une matrice triangulaire inférieure $L = (l_{ij})$ avec $l_{ii} = 1$ $\forall i \in [\![1,n]\!]$ et une matrice triangulaire supérieure U tq $A = LU$.
De plus, une telle factorisation est unique.

Preuve :

① Existence

Montrons que au cours de l'élimination de Gauss, $\forall k \in [\![1,n]\!]$, les pivots $a_{k,k}^k$ ne s'annulent pas. On le montre par réc sur $k \in [\![1,n]\!]$

I $a_{1,1} = \Delta_1 \in GL_1(\mathbb{K})$ donc $a_{1,1} \neq 0$ OK.

H Soit $k \in [\![1,n]\!]$. On suppose que tous les pivots d'ordre $< k$ ne s'annulent pas.
On peut calculer la $k$ième itération de l'élimination de Gauss : $(E_{k-1} \cdots E_1)A = A_k$
avec $E_i = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & -l_{k+1,k} & 1 & \\ & \vdots & & \ddots \\ & -l_{n,k} & & & 1 \end{pmatrix}$ avec $l_{i,k} \overset{\text{déf}}{=} \dfrac{a_{ik}^k}{a_{kk}^k}$ $k+1 \leq i \leq n$.

et : $\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & & \\ x & 1 & \\ x & x \cdots & 1 \end{matrix}} & & \\ \vdots & \ddots & \\ x \; x & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ & (\Delta_k) & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{matrix}} & \cdots & x \\ \vdots & \ddots & \\ x & \cdots & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{11}^1 & \cdots & a_{1k}^1 \\ & \ddots & \vdots \\ & & a_{kk}^k \end{matrix}} & \cdots & x \\ & & \vdots \\ x & \cdots & x \end{pmatrix}$

Utilisant les règles de multiplications par blocs de matrices. On trouve
$\underbrace{\det(\Delta_k)}_{\neq 0 \text{ car inv}} = \underbrace{a_{11}^1 \cdots a_{k-1,k-1}^{k-1}}_{\neq 0 \text{ par H-R}} a_{kk}^k$ donc $a_{kk}^k \neq 0$

On peut effectuer l'élimination de Gauss jusqu'à la $n$ième ligne : $A = LU$
$= \underbrace{(E_{n-1} \cdots E_1)^{-1}}_{\text{tri inf}} \underbrace{(E_{n-1} \cdots E_1 A)}_{\text{tri sup}}$
cf mineques.

② Unicité

Soit $A = L_1 U_1 = L_2 U_2$

Alors $L_2^{-1} L_1 = \begin{pmatrix} 1 & \\ (*) & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & (*) \\ & x \end{pmatrix} = U_2 U_1^{-1}$. Or cette égalité n'est possible que si $L_2^{-1} L_1 = U_2 U_1^{-1} = I_n$ ie $L_1 = L_2$ et $U_1 = U_2$.

Une fois que A est décomposé, complexité de l'algo de $O(n^2)$ pour résoudre le système.

Théorème : Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Alors $\exists! \, B \in GL_n(\mathbb{R})$, $A = B\,{}^tB$ avec B triangulaire inférieure à diagonale positive.

Preuve :

① **Existence**

- Montrons que A admet une décomposition LU. Par l'absurde, s'il existe k dans $[\![1,n]\!]$ tq $\Delta^k \notin GL_k(\mathbb{R})$ alors il existe $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$ tq $\Delta^k \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} = 0$.
Alors $x := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ vérifie $\langle Ax, x \rangle = 0$ ABS car $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.
Soit alors $A = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ (*) & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & & (*) \\ & \ddots & \\ & & u_{nn} \end{pmatrix} = LU$ sa décomposition LU.

- En reprenant les notations : $\det \Delta_k = \prod_{i=1}^{k} u_{ii} \quad \forall k \in [\![1,n]\!]$.
Si on "intercale" la matrice (réelle) $D = \operatorname{diag}(\sqrt{u_{ii}})$ dans cette factorisation LU on obtient :
$$A = (LD)(D^{-1}U) = \begin{pmatrix} \sqrt{u_{11}} & & \\ & \ddots & \\ (*) & & \sqrt{u_{nn}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{u_{11}} & & (*) \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{u_{nn}} \end{pmatrix}$$
Posant $B = LD$ et $C = D^{-1}U$, la symétrie de A entraîne que $BC = {}^tC\,{}^tB$
ou encore $C({}^tB)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & (*) \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ (*) & & 1 \end{pmatrix} = B^{-1}\,{}^tC$

d'où $C({}^tB)^{-1} = B^{-1}\,{}^tC = I_n$ ie $C = {}^tB$.

② **Unicité** :

Soit $A = B_1\,{}^tB_1 = B_2\,{}^tB_2$. Alors $\underbrace{B_2^{-1} B_1}_{\text{triangulaire inf}} = \underbrace{{}^tB_2\,({}^tB_1)^{-1}}_{\text{triangulaire sup}} = D$ diagonale.
Ainsi, $B_1 = B_2 D$ et $A = B_1\,{}^tB_1 = B_2 D\,{}^tD\,{}^tB_2 = B_2 D^2\,{}^tB_2 = B_2\,{}^tB_2$
ie $D^2 = I_n$ et $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $d_i = \pm 1$.
Or les coeff diagonaux d'une décomposition de Cholesky sont positifs donc
$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $d_i = 1$ et $B_1 = B_2$.

Prérequis :

- Le produit de deux matrices triangulaires inférieures (resp sup) est une matrice triangulaire inférieure (resp sup). On peut généraliser au produit de n matrices (Preuve : calcul bête et méchant).
- L'inverse d'une matrice triangulaire inférieure (resp sup) est encore une matrice triangulaire inférieure (resp sup).
Preuve : Soit T l'esp des matrices tri sup et A tri sup inv. L'endomorphisme ϕ de T qui à M associe MA est injectif (car A est inversible). Comme ϕ est un endomorphisme de T, il est surjectif. Il existe donc $B \in T$ tq $\phi(B) = BA = I_n$ ie $B = A^{-1}$ et B triangulaire sup donc A^{-1} aussi.